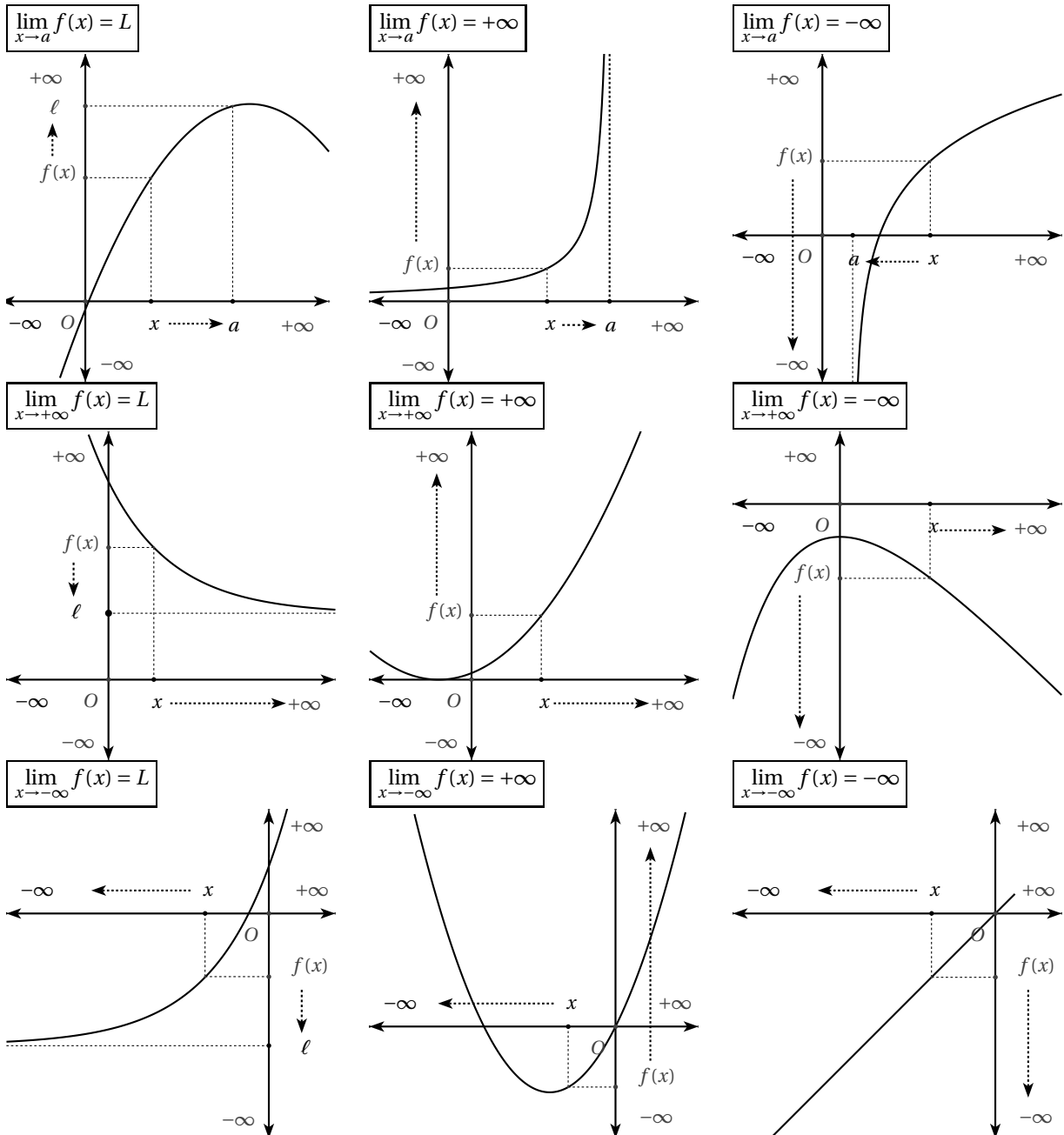


Chapitre n° 2 : Limites et dérivation

Terminale, spécialité mathématique, 2021-2022

1 Notion de limite : les différentes situations.

Dans ces illustrations, a et ℓ désignent des réels fixés.



La notation $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ se lit : la *limite* de $f(x)$ lorsque x tend vers a est ℓ . Les symboles ℓ et a peuvent être des nombres réels ou *moins l'infini* ($-\infty$) ou *plus l'infini* ($+\infty$).

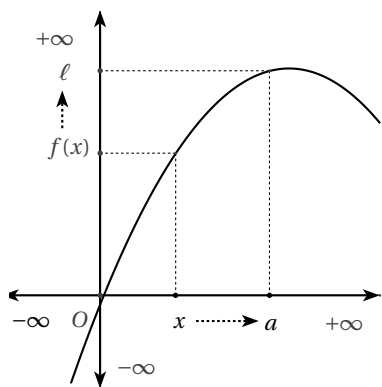
2 Limite lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$

2.1 Cas d'une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$

On dit que la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers a , est $\ell \in \mathbb{R}$ si le nombre $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut du réel ℓ , pourvu que x soit assez proche du réel a . Précisément

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \iff \text{pour tout voisinage } J \text{ de } \ell, \text{ il existe un voisinage } I \text{ de } a \text{ tel que } f(I \cap \mathcal{D}_f) \subset J.$$

Ou : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x \in]a - \delta, a + \delta[\cap \mathcal{D}_f \implies f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$



Exemple 1. Prouver à l'aide de la définition que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{2} = \frac{a}{2}$:

Remarque 1. La fonction f est *continue* sur \mathcal{D} si pour tout $a \in \mathcal{D}$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
On verra que les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition. Pour de telles fonction le calcul d'une limite en un point de l'ensemble de définition est un calcul d'image.

Application : $\lim_{x \rightarrow \pi} x \cos(x) =$

Exemple 2. ★ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et $f(a)$ n'existe pas :

★ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ n'existe pas et $f(a)$ existe :

★ Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et $f(a)$ existe, alors nécessairement $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, c'est-à-dire que f est continue en a .

2.2 Cas où la limite est $+\infty$ ou $-\infty$

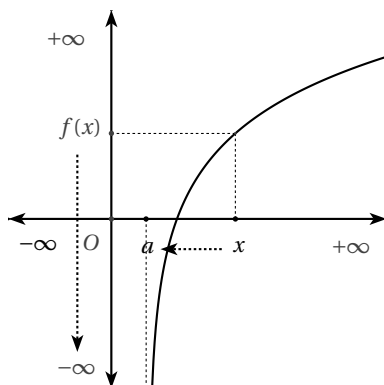
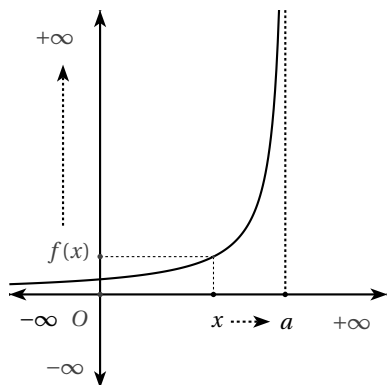
On dit que la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers a , est $+\infty$ si le nombre $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit assez proche du réel a . Précisément :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \iff \text{pour tout voisinage } J \text{ de } +\infty, \text{ il existe un voisinage } I \text{ de } a \text{ tel que } f(I \cap \mathcal{D}_f) \subset J..$$

Ou : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0, \exists \delta > 0, x \in]a - \delta, a + \delta[\cap \mathcal{D}_f \implies f(x) \in]A, +\infty[.$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \iff$$

pour tout $A > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]a - \delta, a + \delta[\cap \mathcal{D}_f$ on a $f(x) \in]-\infty, -A[.$



Interprétation géométrique. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$, on dit que la courbe représentative de f admet la droite d'équation $x = a$ comme *asymptote verticale*.

Exemple 3. Prouver à l'aide des définitions que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.
Interpréter.

2.3 Limites à droite et à gauche

Les *limites à droite* $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x)$ sont définies en remplaçant $]a - \delta, a + \delta[$ par $]a, a + \delta[$.

Les *limites à gauche* $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x)$ sont définies en remplaçant $]a - \delta, a + \delta[$ par $]a - \delta, a[$.

L'interprétation en terme d'asymptote est identique.

Remarque 2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe $\iff \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \end{cases}$

3 Limite lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

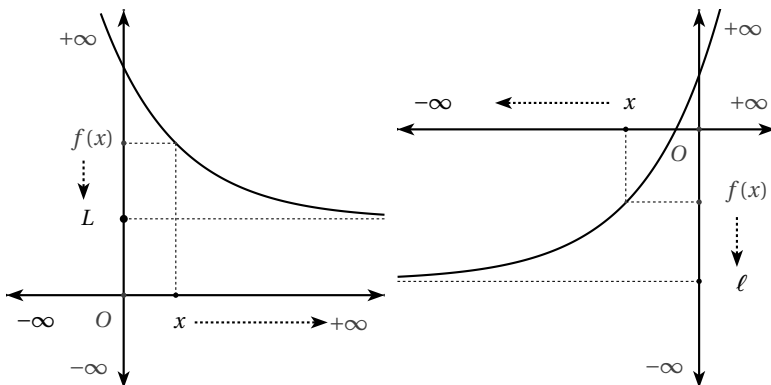
3.1 Cas d'une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$

On dit que la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$ (plus l'infini), est $\ell \in \mathbb{R}$ si le nombre $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut du réel ℓ , pourvu que x soit assez grand. Précisément

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \iff$ pour tout voisinage J de ℓ , il existe un voisinage I de $+\infty$ tel que $f(I) \subset J$.

Ou : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, x \in]B, +\infty[\implies f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

Remarque 3. On définit de même $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ en remplaçant $]B, +\infty[$ par $] -\infty, -B[$.



Interprétation géométrique.

Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, on dit que la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = \ell$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

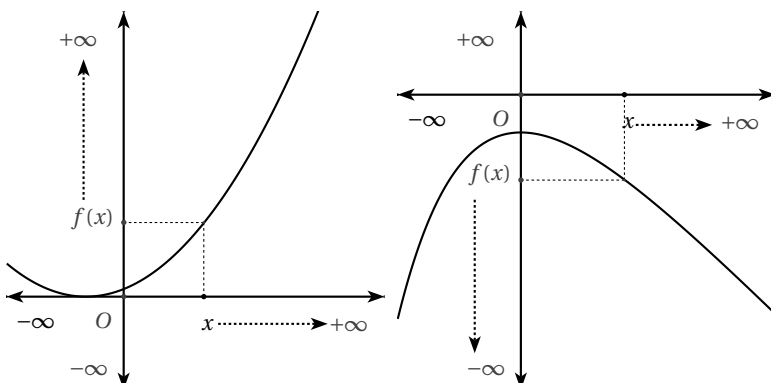
On définit de façon analogue l'asymptote horizontale en $-\infty$.

3.2 Cas d'une limite infinie

On dit que la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$ (plus l'infini), est $+\infty$ si le nombre $f(x)$ peut être grand que l'on veut, pourvu que x soit assez grand. Précisément

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff$ pour tout voisinage J de $+\infty$, il existe un voisinage I de $+\infty$ tel que $f(I) \subset J$.

Ou : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0, \exists B > 0, x \in]B, +\infty[\implies f(x) \in]A, +\infty[$.



Exemple 4. Prouver à l'aide des définitions que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

.....

.....

.....

.....

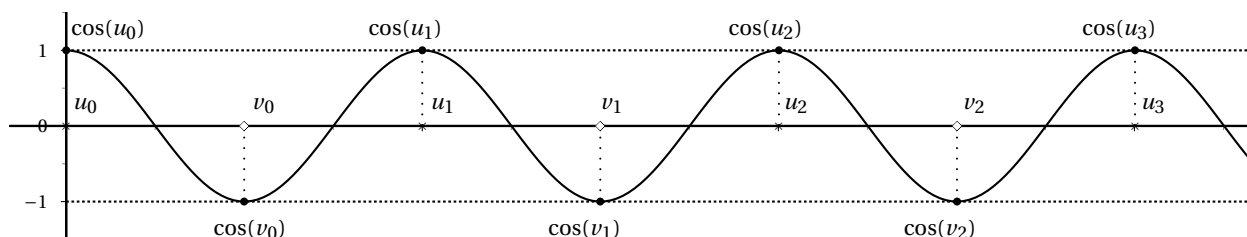
.....

Exemple 5. Définir avec précision : (on se réfère à la première page pour les illustrations)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell &\iff \dots\dots\dots \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty &\iff \dots\dots\dots \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty &\iff \dots\dots\dots \end{aligned}$$

4 Absence de limite

Pour prouver qu'une fonction f n'admet pas de limite en $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, il suffit de trouver deux suites (u_n) et (v_n) qui tendent vers a lorsque n tend vers $+\infty$ mais telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n)$. (contraposée du thm sur les limites des fonctions composées du 6.)



Exemple 6. $\cos(x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$. En effet : soient (u_n) et (v_n) définies par $u_n = 2\pi n$ et $v_n = \pi + 2\pi n$. On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(2\pi n) = 1 \neq -1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(\pi + 2\pi n)$.

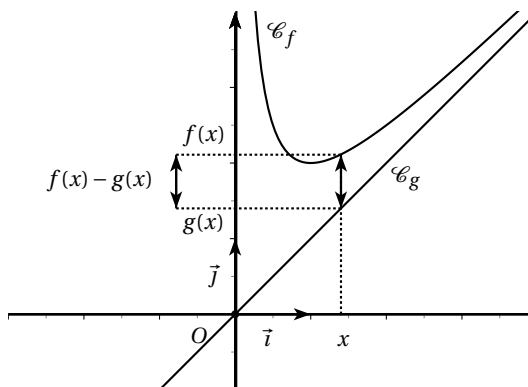
5 Courbe asymptote

5.1 « Différence » de deux courbes

Soient f et g définies sur un intervalle I et \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout $x \in I$, le nombre $f(x) - g(x)$ représente, au signe près, l'écart entre le point de \mathcal{C}_f d'abscisse x et le point de \mathcal{C}_g d'abscisse x .

Méthode 1. Ainsi, pour rechercher les points d'intersection de deux courbes, on résout l'équation $f(x) - g(x) = 0$. L'ensemble des solutions est l'ensemble des abscisses des points appartenant aux deux courbes. On détermine leurs ordonnées en utilisant indifféremment $y = f(x)$ ou $y = g(x)$.



Méthode 2. De même, pour déterminer la position relative de deux courbes, on étudie le signe de $f(x) - g(x)$ en fonction des valeurs de x , et on l'interprète ainsi :

- sur les intervalles où $f(x) - g(x) > 0$, \mathcal{C}_f est au dessus de \mathcal{C}_g .
- sur les intervalles où $f(x) - g(x) < 0$, \mathcal{C}_f est en dessous de \mathcal{C}_g .

5.2 Asymptote oblique

On dit que la courbe représentative d'une fonction f admet la droite d'équation $y = ax + b$ comme asymptote oblique en $+\infty$ si l'écart entre la courbe et la droite tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$.

Exemple 7. Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{3x^2 + 2x + 1}{x}$. Montrer que la droite d'équation $y = 3x + 2$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$:

On définit de même l'asymptote oblique en $-\infty$, et la notion de courbe asymptote :

Exemple 8. Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$. Montrer que la parabole d'équation $y = x^2$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$:

6 Opérations sur les limites

Les résultats qui suivent sont valables pour $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

6.1 Somme de limites

$\lim_{x \rightarrow a} u(x)$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} v(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} u(x) + v(x)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\triangle ? \triangle$

6.2 Produit de limites

$\lim_{x \rightarrow a} u(x)$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} v(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} u(x) \times v(x)$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\triangle ? \triangle$

6.3 Quotient de limites

$\lim_{x \rightarrow a} v(x)$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$0^+ (0, v(x) > 0)$	$0^- (0, v(x) < 0)$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{v(x)}$	$\frac{1}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$

Remarque 4. Lorsque la forme indéterminée, $(\infty - \infty; \infty \times 0; \frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty})$ il faut changer l'écriture de la suite pour lever l'indetermination.

Remarque 5. Pour traiter les limites de quotients $\frac{u}{v}$ on remarque $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$.

\triangle dans le cas de $\frac{1}{v(x)}$, si la limite de $v(x)$ est nulle, il faut étudier le signe de $v(x)$ pour conclure.

\triangle On n'écrit jamais de calcul faisant intervenir $+\infty, -\infty, 0^+, 0^-, \dots$

Exemple 9. • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} =$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} =$

• La limite $\lim_{x \rightarrow 2, x < 2} \frac{1}{2-x}$ dépend du signe de $2-x$ car $\lim_{x \rightarrow 2} 2-x = 0$.

Or

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2-x$		$+$ 0 $-$	

 donc si $x < 2$, on a $2-x > 0$, d'où $\lim_{x \rightarrow 2, x < 2} \frac{1}{2-x} = +\infty$.

Remarque 6. La dernière colonne du tableau des produits est une forme indéterminée :

$\lim_{x \rightarrow +\infty}$	$= +\infty$	}	mais $\lim_{x \rightarrow +\infty}$	$= \lim_{x \rightarrow +\infty}$	$= 7$
$\lim_{x \rightarrow +\infty}$	$= 0$				
$\lim_{x \rightarrow +\infty}$	$= +\infty$	}	mais $\lim_{x \rightarrow +\infty}$	$= \lim_{x \rightarrow +\infty}$	$= +\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty}$	$= 0$				
$\lim_{x \rightarrow +\infty}$	$= +\infty$	}	mais $\lim_{x \rightarrow +\infty}$	$= \lim_{x \rightarrow +\infty}$	$= 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty}$	$= 0$				

6.4 Limite de fonctions composées

Soient $a, b, \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et $\lim_{X \rightarrow b} v(X) = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow a} v(u(x)) = \ell$.

Exemple 10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) =$

7 Traiter les formes indéterminées

⚠ avant d'utiliser l'une des techniques suivantes, s'assurer d'avoir **simplifié** l'expression.

Exemple 11. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \dots\dots\dots$

7.1 Formes indéterminées avec des polynômes

D'une manière générale, factoriser dans l'expression, ou au numérateur et au dénominateur, le terme qui semble devoir dominer :

Exemple 12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^6 - x^4 + x^3 + 1 = \dots\dots\dots$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 10\sqrt{x} - x + 2 = \dots\dots\dots$

Exemple 13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1}{x^2 + x + 1} \dots\dots\dots$

7.2 Forme indéterminée $\frac{0}{0}$ et changement de variable

Pour les limites en $a \in \mathbb{R}$ (ou a^+ , a^-) qui présentent une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$, il peut être opportun de faire un changement de variable en posant $x = a + h$.

Exemple 14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{1 - x} = \dots\dots\dots$

7.3 Forme indéterminée et radicaux : quantité conjuguée

Pour les limites faisant intervenir des radicaux, on peut essayer de multiplier au numérateur et au dénominateur par *la quantité conjuguée* avec comme idée d'utiliser l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

Exemple 15. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{\sqrt{x + 3} - 2} = \dots\dots\dots$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x}} = \dots\dots\dots$

8 Théorèmes d'encadrement

8.1 Théorème de majoration et de minoration

[ROC] Soient u et f deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$.

- ★ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$ et pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f(x) \geq u(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- ★ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -\infty$ et pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f(x) \leq u(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Preuve. On prouve le premier point (la démo du second est analogue, laissée en exercice).

Par définition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$ signifie que pour tout $A > 0$, il existe $B > a$ tel que pour tout $x \in [B, +\infty[$, on ait $u(x) \in [A, +\infty[$.

Or pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f(x) \geq u(x)$ donc en particulier, pour tout $x > B$, on a l'inégalité $f(x) \geq u(x) \geq A$, donc $f(x) \geq A$. On a prouvé :

Pour tout $A > 0$, il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \in [B, +\infty[$, on ait $f(x) \in [A, +\infty[$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. \square .

Exemple 16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\cos(x) - 2) = \dots\dots\dots$

8.2 Théorème « des gendarmes »

[ROC] Soient u , v , et f trois fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

Remarque 7. il existe des théorèmes analogues lorsque x tend vers $-\infty$, vers a , a^+ ou a^- .

\triangle Les inégalités strictes ne passent pas aux limites. Contre exemple : $\dots\dots\dots$

Exemple 17. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ $\dots\dots\dots$

Preuve. Démonstration du théorème des gendarmes :

9 Croissance comparée et limite remarquable

Théorème 1

- ① $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ② $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \ (n \in \mathbb{N})$ (croissance comparée)
 ③ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ ④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \ (n \in \mathbb{N})$ (croissance comparée)
 ⑤ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (taux d'accroissement en 0)

Preuve. ① Soient \mathcal{C} la courbe de la fonction exponentielle et (d) la tangente à l'origine à \mathcal{C} .

(d) a pour équation $y = \exp'(0)(x-0) + \exp(0)$ c'est-à-dire $y = x + 1$

Étudions la fonction f définie par $f(x) = \exp(x) - (x + 1)$.

Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = \exp(x) - 1 = \exp(x) - \exp(0)$.

Comme la fonction exponentielle est croissante sur \mathbb{R} , $f'(x) \geq 0 \iff x \geq 0$ donc :

le minimum de f est atteint en 0 et vaut $f(0) = 0$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ c'est-à-dire $e^x \geq x + 1$.

$$\text{Pour tout } x > 0 : \frac{e^x}{x} = \frac{e^{\frac{x}{2}} \times e^{\frac{x}{2}}}{2 \times \frac{x}{2}} = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} \times \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} \geq \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}.$$

La dernière inégalité vient de la position relative courbe-tangente qu'on vient d'étudier : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1 > x$ donc pour tout $X > 0$, $\frac{e^X}{X} > 1$.

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty, \text{ donc par composition : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} = +\infty.$$

Par théorème de comparaison, on a bien : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

② Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{\left(n \times \frac{x}{n}\right)^n} = \left(\frac{1}{n} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} = +\infty \text{ et, par croissance comparée, } \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty, \text{ donc, par composition, on a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty.$$

$$n > 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty.$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} X^n = +\infty \text{ donc par composition des deux dernières limites : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n = +\infty,$$

$$\text{c'est-à-dire } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

③ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} -X e^{-X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{X}{e^X} = 0$ (inverse de la limite précédente).

④ même idée qu'en ②

⑤ Comme $\exp'(0) = 1$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{0+h} - e^0}{h} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. \square .

10 Nombre dérivé

10.1 Définition

Définition 2 (Accroissement moyen)

Soit x_1 et x_2 deux réels distincts appartenant à I . On appelle **accroissement moyen** de f entre x_1 et x_2 la quantité :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1 ; x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

En notant $x_1 = a$ et $x_2 = a + h$ avec $h \neq 0$, on obtient :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Remarque 8. $\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1 ; x_2)$ est le coefficient directeur de la droite sécante à la courbe passant par les points $(x_1 ; f(x_1))$ et $(x_2 ; f(x_2))$.

Définition 3 (Tangente)

Soient A et M deux points distincts d'une courbe. Géométriquement, la **tangente** à la courbe au point A est la position limite de la sécante (AM) lorsque M se rapproche de A .

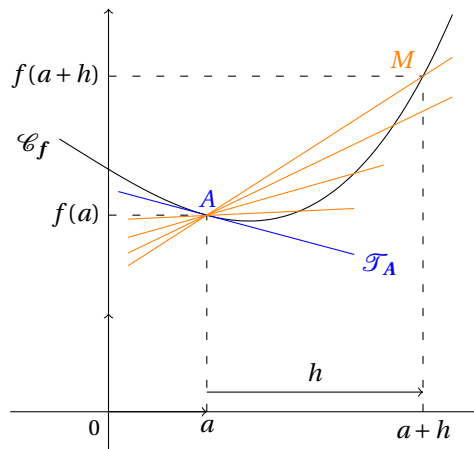
Remarque 9.

Soit a un réel pour lequel f est dérivable et soit $h \neq 0$ tel que $a + h \in I$.

Les deux points $A(a ; f(a))$ et $M(a + h ; f(a + h))$ sont deux points distincts de \mathcal{C}_f . $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a)$ représente le coefficient directeur de la droite (AM) , sécante à la courbe. On note \mathcal{T}_A la tangente à \mathcal{C}_f au point A .

Lorsque $h \rightarrow 0$:

- ★ M se rapproche de A ;
- ★ (AM) se rapproche de \mathcal{T}_A ;
- ★ $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a) \rightarrow f'(a)$.



Définition 4 (Nombre dérivé)

Si, lorsque h se rapproche de 0, $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a)$ se rapproche d'un réel ℓ , alors :

- ★ on dit que la fonction f est dérivable en a ;
- ★ le réel ℓ est appelé **nombre dérivé de f en a** , que l'on note $f'(a)$.

On écrit alors :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(a).$$

« $\xrightarrow{h \rightarrow 0} \dots$ » se lit « tend vers ... lorsque ... tend vers ... ».

Méthode 3 (Déterminer un nombre dérivé).

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2$.

Déterminer s'il existe $f'(3)$.

Pour tout $h \neq 0$: $\frac{\Delta f}{\Delta x}(3) = \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$ d'où $\frac{\Delta f}{\Delta x}(3) = 6 + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 6$.

On obtient un nombre réel donc f est dérivable en 3 et $f'(3) = 6$.

Remarque 10. $f'(a)$ se note aussi $\frac{df}{dx}(a)$. Le d symbolisant une petite **différence** (au sens d'une limite, c'est-à-dire infinitésimale), en comparaison avec le Δ , symbolisant une grande **Différence** (au sens d'une valeur non nulle).

Théorème 5 (Coefficient directeur de la tangente)

$f'(a)$ est le **coefficient directeur** de la tangente à la courbe au point d'abscisse a .

Méthode 4 (Déterminer l'équation réduite d'une tangente).

- ① On calcule $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a)$ puis on fait tendre h vers 0.
- ② Si f est dérivable en a , la tangente a alors pour équation réduite $y = f'(a)x + p$.
- ③ On trouve p en utilisant les coordonnées d'un point de la tangente : $A(a; f(a))$.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 3x$.

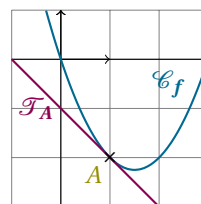
Déterminer l'équation réduite de la tangente à \mathcal{C}_f au point A d'abscisse 1.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(1) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{[(1+h)^2 - 3(1+h)] - [1^2 - 3 \times 1]}{h} = \frac{h^2 - h}{h} = h - 1.$$

Lorsque $h \rightarrow 0$, on a : $h - 1 \rightarrow -1$.

f est donc dérivable en 1 et on a $f'(1) = -1$.

Ainsi, \mathcal{T}_A a pour équation $y = -x + p$. On utilise maintenant le point $A(1; f(1))$, c'est-à-dire $A(1; -2)$ et on obtient $-2 = -1 + p$, c'est-à-dire $p = -1$. \mathcal{T}_A a donc pour équation réduite $y = -x - 1$.



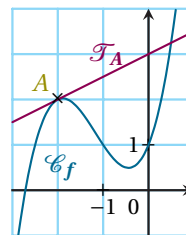
Méthode 5 (Lire graphiquement un nombre dérivé).

Soit f une fonction dont on donne la représentation graphique. La droite \mathcal{T}_A est tangente à la courbe au point A d'abscisse -2 .

Déterminer graphiquement $f'(-2)$.

$f'(-2)$ est le coefficient directeur de \mathcal{T}_A .

Graphiquement, on a $f'(-2) = \frac{1}{2}$.



Théorème 6 (Équation réduite de la tangente)

Soit f une fonction dérivable en a de courbe représentative \mathcal{C}_f .

L'équation réduite de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Preuve. Si f est dérivable en a , $f'(a)$ est alors par définition le coefficient directeur de la tangente donc son équation est du type $y = f'(a)x + p$. Pour déterminer p , on utilise le point commun à la tangente et à la courbe, c'est-à-dire $A(a; f(a))$. On obtient alors :

$$f(a) = f'(a)a + p \iff p = f(a) - f'(a)a.$$

Ainsi, l'équation réduite de la tangente est :

$$y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)(x - a) + f(a).$$

11 Fonction dérivée

11.1 Dérivabilité sur un intervalle

Définition 7

Quand f admet un nombre dérivé en tout point $x \in I$, on dit que f est dérivable sur I . On définit alors la fonction

$$\text{dérivée, notée } f' : \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{array} .$$

Exemple 18. ① Retrouver "à la main" les fonctions dérivées de la fonction carrée et de la fonction racine.

② Montrer à la main que la dérivée de $u + v$ est $u' + v'$.

③ En se servant de l'égalité ci-dessous, établir la formule de dérivation d'un produit.

$$u(x_0 + h)v(x_0 + h) - u(x_0)v(x_0) = u(x_0 + h)v(x_0 + h) - u(x_0 + h)v(x_0) + u(x_0 + h)v(x_0) - v(x_0)u(x_0),$$

11.2 Composée

Théorème 8

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur $u(I)$.

Alors la fonction $v \circ u$ définie sur I par $v \circ u(x) = v(u(x))$ est dérivable sur I et, pour $x \in I$: $(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$.

Remarque 11. ①
$$\frac{v(u(x_0 + h)) - v(u(x_0))}{h} = \frac{v(u(x_0 + h)) - v(u(x_0))}{u(x_0 + h) - u(x_0)} \times \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h}.$$

Lorsque h tend vers 0 :

- La limite du second facteur est $u'(x_0)$ par définition.
- $u(x_0 + h)$ tend vers $u(x_0)$ (car u continue) donc le 1^{er} facteur tend vers $v'(u(x_0))$ par composition de limites.

On obtient le résultat du théorème par un calcul simple, **mais faux dans le cas général**. En effet, le dénominateur du premier facteur peut s'annuler même pour $h \neq 0$ (si u est constante, par exemple). Pour éviter ces divisions par 0, la démonstration du théorème à une notion inconnue (développement limité d'ordre 1)

Propriété 9

u une fonction dérivable sur I et $n \in \mathbb{Z}^*$. Alors, lorsque u^n définie : $(u^n)'(x) = nu'(x)u^{n-1}(x)$

Propriété 10

Soit u une fonction dérivable sur I . Alors, pour x tel que $u(x) > 0$: $(\sqrt{u})'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

Propriété 11

Soit u une fonction dérivable sur I . Alors, pour x tel que $u(x) > 0$: $(e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Exemple 19. Donner le domaine de définition, de dérivabilité, et le calcul de la dérivée des fonctions suivantes :

① $f_0 : x \mapsto \cos(3x + \pi)$

② $f_1 : x \mapsto \sin(x^2)$

③ $f_2 : x \mapsto (2x^2 - x + 1)^6$

④ $f_3 : x \mapsto \sqrt{x^2 + x}$

12 Applications de la dérivation

12.1 Calculs de limites

Exemple 20. Déterminer les limites suivantes en admettant la dérivabilité des fonctions sin et cos :

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}$

12.2 Variations

Théorème 12

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- ① f est constante sur $I \iff f' = 0$ sur I .
- ② f est croissante (resp. décroissante) sur $I \iff f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) sur I .
- ③ f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $I \iff f' > 0$ (resp. $f' < 0$) sur I sauf en des points isolés où elle s'annule.

Exemple 21. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}^+$, $\sin(x) \leq x$, en considérant connue la dérivée de sin.

12.3 Extremum local

Le résultat suivant donne une *condition nécessaire* pour que f ait un extremum local en x_0 :

Théorème 13

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Si f admet un extremum local en $x_0 \in I$ tel que x_0 ne soit pas une des extrémité de I alors $f'(x_0) = 0$.

Le résultat suivant donne une *condition suffisante* pour que f ait un extremum local en x_0 :

Théorème 14

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un point intérieur à I .

Si f' s'annule en x_0 **en changeant de signe** alors f a un extremum local en x_0 .

Exemple 22. ① $f : x \mapsto x^3$ admet-elle un extremum en 0?

② $f : x \mapsto \frac{ax^2 + x - 1}{2x - 3}$. Comment choisir a pour que f admette un maximum en $x = 1$?

13 Formulaire

13.1 Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Domaine de validité	Condition
k	0	\mathbb{R}	$k \in \mathbb{R}$
x	1	\mathbb{R}	
$ax + b$	a	\mathbb{R}	$a, b \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R} : (n \geq 0); \mathbb{R} - \{0\} : (n < 0)$	$n \in \mathbb{Z} - \{0\}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$	
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$	

13.2 Opérations sur les dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel. Alors,

Fonction f	Fonction dérivée f'	Domaine de validité
$u + v$	$u' + v'$	I
uv	$u'v + v'u$	I
ku	ku'	I
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$	tout $x \in I$ tel que $v(x) \neq 0$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	tout $x \in I$ tel que $v(x) \neq 0$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$	$x \in I$ tels que $u(x) > 0$
e^u	$u' \times e^u$	I